

Lijnen van betekenis – meetkunde in 2hv

Docentenhandleiding bij de DWO-module Lijnen van betekenis

Deze handleiding bevat tips voor de docent bij het gebruiken van de module *Lijnen van betekenis*, een module over meetkunde voor klas 2havo/vwo. De module bestaat uit vijf hoofdactiviteiten, een inleidende activiteit en een activiteit met gemengde opgaven. De nummering in deze handleiding komt overeen met de nummering in de module. Opgave 1.8 is bijvoorbeeld te vinden in activiteit 1, F-hoeken, Z-hoeken en middenparallellellen.

Voor een handleiding bij de DWO, zie www.wisweb.nl.

Onderwerp en niveau

De module *Lijnen van betekenis* gaat over speciale lijnen in het platte vlak. In de module komen achtereenvolgens middenparallellellen, middelloodlijnen, bissectrices, hoogtelijnen en zwaartelijnen aan bod. De leerlingen maken kennis met de eigenschappen van deze lijnen. Ook tekenen en construeren de leerlingen de verschillende lijnen in diverse situaties, met behulp van het tekenprogramma Geogebra.

De module sluit aan bij de meetkundestof uit 2havo/vwo en is met name geschikt voor vwo-leerlingen. Met weglating van een aantal moeilijke opgaven is de module ook geschikt voor havo-klassen of havo/vwo-klassen. De volgende opgaven kunnen overgeslagen worden: 1.11, 1.12, 2.5c, 2.6, 3.5c, 3.7, 3.11, 4.9, 5.6, 5.7, 5.10, 5.11, 6.6c, 6.8. Bij 1.11 en 1.12 worden wel knoppen van Geogebra geïntroduceerd; deze knoppen hebben de leerlingen bij latere opgaven ook nodig.

De volgende opgaven zijn pittig, maar bevatten wel nuttige theorie: 2.3, 5.3. Het kan dus nuttig zijn om deze opgaven klassikaal te behandelen.

Combinatie met boek en pen en papier

De stof in de module wordt ook behandeld in de reguliere schoolboeken voor 2havo/vwo. De stof komt overeen met hoofdstuk 12 van *Moderne Wiskunde*, 9^e editie en met paragraaf 1 t/m 3 en een deel van paragraaf 4 van hoofdstuk 2 in *Getal & Ruimte*, editie 2009.


De module kan als vervanging van deze hoofdstukken of paragrafen worden gebruikt, maar het is ook mogelijk delen van de module en delen van het boek te combineren. Houdt er wel rekening mee dat de leerlingen enige tijd nodig zullen hebben om aan de bediening van de module te wennen. We bevelen dus aan om de module alleen als substantieel onderdeel van dit onderwerp te gebruiken, en niet alleen als “extraatje”.

Eén van de leerdoelen van het meetkundehoofdstuk in klas 2 is dat leerlingen netjes leren tekenen met hun geodriehoek en passer. Daarom zitten in de module enkele opgaven die de leerlingen in hun schrift moeten doen. Het gaat om de opgaven 1.8c, 2.4c, 3.10b, 5.11b, 6.3b, 6.3c, 6.4b, en 6.4c. Bij elk van deze opgaven staat aangegeven dat het de bedoeling is dat de leerling de opgave in het schrift maakt. Ook de zelftoets uit het boek kunnen de leerlingen met pen en papier maken.

Bij netjes tekenen hoort ook het gebruik van markeringen voor rechte hoeken, evenwijdige lijnen, gelijke hoeken en even lange lijnstukken. Het aangeven van deze markeringen op papier is eenvoudig, maar in Geogebra is het een omslachtige handeling. Daarom wordt het gebruik van markeringen in de module niet overal aangemoedigd en is het zelfs niet overal mogelijk. Bij pen-en-papier-werk kan het dus nuttig zijn hier nog eens extra aandacht aan te besteden.

Nakijken in de DWO en Geogebra

De meeste opgaven in de module worden nagekeken door de DWO. Dit geldt voor de DWO-invulvakjes, voor sleep- en selectieopdrachten en ook voor de tekenopdrachten in Geogebra. Als een opdracht in Geogebra kan worden nagekeken, dan staat onderin het Geogebra-scherm een 'kijk na'-knop. Net als bij DWO-invulvakjes kan ook in Geogebra een gele vink verschijnen. De leerling heeft dan al wel een deel van de gevraagde objecten getekend, maar nog niet alles. Dit komt ook voor als de gevraagde objecten verspreid zijn over de verschillende deelopgaven, zoals bijvoorbeeld in opgave 2.5 en 3.5.

Sommige opgaven worden helemaal niet nagekeken. Bij Geogebra-opgaven ontbreekt dan de 'kijk na'-knop. In de paragraaf 'Opmerkingen over specifieke opgaven' vindt u een lijst met alle Geogebra-opgaven die niet worden nagekeken, inclusief suggesties voor oplossingen. Tekstopgaven die niet worden nagekeken zijn aangegeven met het symbool . Hierbij is het meestal de bedoeling dat de leerling zelf eigenschappen van speciale lijnen of figuren ontdekt. Een lijst met tekstopgaven die niet worden nagekeken, inclusief suggesties voor antwoorden, is te vinden in de paragraaf 'Opmerkingen over specifieke opgaven'.

Werken met Geogebra

Voor het gebruiken van de module is het niet nodig dat leerlingen al kunnen werken met Geogebra. In activiteit 0, Introductie Geogebra, leren de leerlingen met de belangrijkste knoppen werken. Uitleg over andere knoppen volgt bij de eerste opgave waar de betreffende knop nodig is. Standaardknoppen in Geogebra die in de hele module niet nodig zijn, zijn weggelaten uit de knoppenbalk. Een overzicht van alle knoppen die worden gebruikt in de module, met daarbij de uitleg die de leerlingen erbij krijgen, vindt u in Bijlage 1.

Voor Geogebra zijn er enkele aandachtspunten. Veel van deze aandachtspunten staan ook ergens als tip of opmerking in het materiaal.

- Geogebra blijft op de laatst gebruikte knop staan. Als u iets anders wil doen, zoals een object verslepen, is het verstandig eerst op de knop van het pijltje, linksboven, te klikken.
- Bij opgaven waar een driehoek moet worden getekend of geconstrueerd, is het niet voldoende om drie lijnen en drie punten te tekenen. Geogebra rekent de constructie pas goed als met de knop 'Veelhoek' een driehoek is getekend.
- Voor snijpunten van twee lijnen of van een lijn en een cirkel is het vaak voldoende om de knop 'Nieuw punt' te gebruiken. Voor snijpunten van lijnen of cirkels met de zijden van een veelhoek is de knop 'Snijpunten van twee objecten' echt nodig, anders tekent Geogebra een willekeurig punt op de veelhoek. Zo kan het gebeuren dat een oplossing die helemaal correct lijkt te zijn, toch niet goed is.
- Bij sommige opgaven is het mogelijk om de namen van punten te veranderen, door met de rechtermuisknop op een punt te klikken. In het menu dat dan verschijnt, staat ook 'Eigenschappen'. Via deze optie 'Eigenschappen' kunnen leerlingen bij een overzicht van alle objecten komen, ook de objecten die worden gebruikt voor het nakijken van de opgave. Dit is dus eigenlijk verboden terrein voor de leerlingen. Als een leerling een opgave goed heeft gemaakt, zonder dat duidelijk is met welke constructiestappen, dan zou dit de oorzaak kunnen zijn.

Het gaat hier om de volgende opgaven: 1.11, 1.12, 2.7, 2.9, 2.10, 3.3, 3.5, 3.8, 3.11, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 6.2, 6.5, 6.7, 6.9.

Opmerkingen over specifieke opgaven

Bij een aantal opgaven is de gegeven constructie (punten, een driehoek) beweegbaar. Hier kunnen de leerlingen punten verslepen, om bijvoorbeeld te 'zien' dat een eigenschap van een driehoek (zoals 'de zwaartelijnen gaan door één punt') altijd geldt, en niet alleen toevallig in de getekende driehoek. Dit is het geval bij de volgende opgaven: 2.5, 2.7, 2.9, 3.5, 3.8, 4.2, 5.2.

Voor de meeste opgaven zullen de antwoorden of oplossingen duidelijk genoeg zijn voor een docent. Hieronder volgen drie lijsten met extra opmerkingen voor opgaven waarbij dit mogelijk niet het geval is:

- Een lijst met Geogebra-opgaven die niet worden nagekeken
- Een lijst met tekstopgaven die niet worden nagekeken
- Een lijst met opmerkingen bij overige opgaven

Geogebra-opgaven die niet worden nagekeken

Bij onderstaande opgaven hebben de leerlingen enige vrijheid. Er is steeds niet maar één oplossing goed. Vaak moeten de leerlingen bijvoorbeeld een driehoek tekenen die aan één eigenschap voldoet, maar waarvan de rest vrij is. Zulke opgaven zijn helaas niet goed na te kijken in de DWO.

1.2a

1.2b

2.9b De getekende driehoek moet gelijkbenig zijn met tophoek B.

2.10a De getekende driehoek moet stomphoekig zijn.

3.2a

3.4a De getekende driehoek moet stomphoekig zijn.

5.9a De getekende driehoek moet gelijkbenig zijn.

5.9b De getekende driehoek moet gelijkbenig zijn.

Tekstopgaven die niet worden nagekeken

Bij een aantal opgaven in de module staat een open antwoordvak. Hieronder volgt een overzicht van deze opgaven en van de antwoorden of ideeën die bij de open tekstopgaven worden verwacht van de leerlingen.

Activiteit 1: F-hoeken, Z-hoeken en middenparallel

1.1c Vliegtuigen 1 en 2 vliegen precies in dezelfde richting.

1.5c Ja, want hoek B_4 is vanwege F-hoeken altijd gelijk aan hoek A_4 , die samen met hoek A_1 een gestrekte hoek vormt. Dus de hoeken A_1 en A_4 zijn samen 180 graden, dus hoeken A_1 en B_4 ook.

1.6b De drie hoeken bij A zijn samen 180 graden. Maar vanwege Z-hoeken is hoek B gelijk aan de meest linkse hoek bij A en is hoek C gelijk aan de meest rechtse hoek bij A. De som van de hoeken A, B en C is dus gelijk aan de som van de hoeken bij A, dus ook 180 graden.

1.7b De hoeken die tegenover elkaar liggen, zijn gelijk.

1.9b Een middenparallel in een driehoek is half zo lang als de zijde waaraan hij evenwijdig is.

Activiteit 2: Cirkels en middelloodlijnen

2.5b De twee snijpunten zijn punten die even ver van A als van B af liggen. Beide punten liggen dus op de middelloodlijn van lijnstuk AB. Daarom moet de (enige) lijn door deze twee

punten wel de middelloodlijn zijn.

- 2.8b** Omdat M op de middelloodlijn van AB ligt, is de afstand van M tot A even groot als de afstand van M tot B. Dus B ligt op de cirkel door A met middelpunt M. En omdat M op de middelloodlijn van AC ligt, geldt datzelfde voor C.
- 2.9b** Als B op de middelloodlijn van AC ligt, dan zijn AB en AC even lang. Dus dan is de driehoek gelijkbenig.
- 2.10b** Zo'n driehoek moet stomphoekig zijn; één van de hoeken is groter dan 90 graden.
- 2.10c** Ja, als de driehoek rechthoekig is, dus een hoek heeft van precies 90 graden.

Activiteit 3: Bissectrices

- 3.2b** Deze drie punten liggen op een lijn.
- 3.4b** Er zijn twee verschillende hoeken tussen de lijnen die zijn aangeklikt. Geogebra tekent de bissectrices van beide hoeken.
- 3.9b** Omdat I op de bissectrice van hoek B ligt, is de afstand van I tot AB gelijk aan de afstand van I tot BC. En omdat I op de bissectrice van hoek A ligt, is de afstand van I tot AB gelijk aan de afstand van I tot AC. Dus die drie afstanden zijn gelijk, dus E en F liggen ook op de cirkel met middelpunt I en straal $|ID|$.

Activiteit 4: Hoogtelijnen

- 4.2b** Ze gaan door één punt.
- 4.3c** De middelloodlijnen van een driehoek gaan altijd door één punt. Omdat de hoogtelijnen van driehoek ABC precies dezelfde lijnen zijn als de middelloodlijnen van driehoek DEF, moeten ze dus wel door één punt gaan.
- 4.4b** Een rechthoekige driehoek. De hoogtelijn moet uitkomen in een hoekpunt en daar loodrecht op de andere zijde staan, dus die hoek moet wel 90 graden zijn.
- 4.5a** M en N liggen op dezelfde cirkel met middelpunt C, dus ze liggen beide even ver van C af. Daarom ligt C op de middelloodlijn van het lijnstuk MN. Maar dan is die middelloodlijn dus een lijn loodrecht op MN (dus loodrecht op AB) en door C, dus dat is precies de hoogtelijn uit C op AB.

Activiteit 5: Zwaartelijnen

- 5.1b** De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$. Omdat D in het midden van BC ligt, is de basis voor beide driehoeken gelijk. Maar de hoogte is voor beide driehoeken de afstand van A tot BC, dus ook die is voor beide driehoeken gelijk.
- 5.2b** Ze gaan door één punt.
- 5.3c** We weten al dat $\text{opp}(CDS) = \text{opp}(BDS)$. Omdat D het midden is van BC geldt ook $\text{opp}(CDA) = \text{opp}(BDA)$. Als we deze twee van elkaar aftrekken vinden we $\text{opp}(CDA) - \text{opp}(CDS) = \text{opp}(BDA) - \text{opp}(BDS)$. Links staat precies de oppervlakte van de groene driehoek en rechts staat de oppervlakte van de blauwe driehoek, dus deze twee zijn gelijk. Met de rode en blauwe driehoek kunnen we precies hetzelfde doen, omdat E het midden is van AC. Dus de oppervlaktes van de rode en de blauwe driehoek zijn gelijk, en daarmee zijn ze alle drie gelijk.
- 5.9a** De middelloodlijn moet dan door een hoekpunt gaan, dus dat hoekpunt ligt even ver van de andere twee hoekpunten af, dus de driehoek is gelijkbenig.
- 5.9b** Ook deze driehoek moet gelijkbenig zijn.
- 5.10b** De juiste verdeling is de rode. Daarin is de figuur eerst in twee driehoeken verdeeld en

vervolgens is in beide driehoeken de zwaartelijn getrokken. Beide driehoeken worden dus in gelijke delen verdeeld, dus de totale vierhoek ook.

- 5.11b** De figuur is te verdelen in een vierkant en vier driehoeken. Al deze driehoeken hebben basis 3 en hoogte 4, dus hun oppervlaktes zijn gelijk. In elk van de driehoeken is een zwaartelijn getekend en het vierkant is in vier kwarten verdeeld. Elk van de vier stukken bestaat nu uit twee helften van de driehoeken en een kwart van het vierkant.

Activiteit 6: Gemengde opgaven

- 6.6c** Vanwege de hoekensom in driehoek ABC zijn hoeken B1, B2, C1 en C2 samen 110 graden. Maar dan zijn hoeken B2 en C2 samen 55 graden, want hoeken B1 en B2 zijn even groot en hoeken C1 en C2 zijn even groot. Vanwege de hoekensom in driehoek IBC is hoek I1 nu altijd 125 graden.
- 6.8** Elk van de zijden van de ruit heeft lengte 5, want samen hebben ze lengte 20. Verder verbindt de zijde van de ruit die linksboven ligt, de middens van de rechthoekszijde links en de rechthoekszijde boven. De zijde van de ruit is dus de middenparallel in de driehoek die wordt gevormd door die twee rechthoekszijden en de rode diagonaal. Maar dat betekent dat de rode diagonaal twee keer zo lang is als de zijde van de ruit, dus de rode diagonaal heeft lengte 10.

Opmerkingen bij overige opgaven

- 1.5** Deze opgave gaat over U-hoeken, maar dat staat er niet expliciet bij. Iets om eventueel nog aandacht aan te besteden.
- 5.7** Eerst een hoek van 50° tekenen, vervolgens het midden van AB bepalen en daar omheen een cirkel met straal 2 tekenen. Het snijpunt van deze cirkel en het tweede been van de hoek van 50° is hoekpunt C. Niet vergeten ook nog de driehoek te tekenen.
- 5.8** Het midden van BC ligt op afstand 3 van A en op afstand 2 van B. Teken dus een cirkel met straal 3 om A en een cirkel met straal 2 om B. Het snijpunt van deze twee cirkels boven AB is het midden van BC. Om C te vinden tekenen we de halve lijn uit B door dit midden en tekenen we een cirkel om dit midden met straal 2. Het tweede snijpunt van de halve lijn en de cirkel is punt C. Niet vergeten ook nog de driehoek te tekenen.
- 5.11b** De vier punten van de ster hebben gelijke oppervlakte, dus de ster kan ook verdeeld worden in vier stukken die elk bestaan uit een punt en een kwart van het vierkant (daarbij kan het vierkant bijvoorbeeld opgesplitst worden met behulp van de diagonalen).

Bijlage 1: Gebruikte Geogebra-knoppen

Het meetkundeprogramma Geogebra heeft onzettend veel mogelijkheden. Om het eenvoudig te houden voor leerlingen en docenten, zijn in de module alleen de noodzakelijke knoppen zichtbaar. Hieronder volgt een overzicht van al deze knoppen. Bij elke knop staat de uitleg die de leerling in de module te zien krijgt. Sommige knoppen zijn niet direct zichtbaar in de menubalk. Als u op het pijltje rechts onderin een knop klikt, verschijnt een uitklapmenu met meer knoppen.



Verplaatsen: Hiermee kun je punten, lijnen en figuren in het vlak verschuiven.



Tekenvenster verplaatsen: Hiermee kun je het hele tekenvlak verschuiven.



Object verwijderen: Hiermee kun je punten, lijnen en figuren verwijderen.



Nieuw punt: Hiermee teken je nieuwe punten.



Snijpunt(en) van twee objecten: Klik op twee objecten (lijnen, cirkels) om de snijpunten van die objecten te tekenen.



Midden of middelpunt: Klik op twee punten of een lijnstuk om het midden tussen die twee punten of van dat lijnstuk te tekenen.



Rechte door twee punten: Hiermee teken je een lijn door twee punten.



Lijnstuk tussen twee punten: Hiermee teken je een lijnstuk tussen twee punten.



Halfrechte door twee punten: Klik eerst op het beginpunt van de halve lijn en vervolgens op een ander punt dat op de halve lijn moet komen te liggen.



Evenwijdige rechte: Klik op een punt en een lijn om een nieuwe lijn te tekenen door het punt en evenwijdig aan de geselecteerde lijn.



Loodlijn: Klik op een lijnstuk of lijn en op een punt om de lijn door het gekozen punt loodrecht op het gekozen lijnstuk of de gekozen lijn te tekenen.



Bissectrices: Klik de twee lijnen waartussen je de bissectrice wilt tekenen aan. Je kunt ook drie punten aanklikken; één op het ene been, daarna het snijpunt van de lijnen en dan een punt op het andere been.



Veelhoek: Deze knop gebruik je voor het tekenen van een driehoek, maar je kunt er ook figuren met meer hoeken mee tekenen. Klik één voor één de hoekpunten van je driehoek aan en eindig met hetzelfde hoekpunt als waarmee je begint. Zo weet Geogebra dat de driehoek (of veelhoek) af is en dat je niet nog meer hoekpunten wil toevoegen.



Cirkel met middelpunt door punt: Klik het middelpunt van de cirkel die je wil tekenen aan en klik ook op een punt dat op de cirkel moet liggen. Zo vind je alle punten die op een bepaalde afstand van het middelpunt liggen.



Cirkel met middelpunt en straal: Klik op het punt dat het middelpunt van de cirkel moet worden. Vul vervolgens de straal in in het schermje dat verschijnt.



Passer: Klik op twee punten of op een lijnstuk om de straal van de cirkel die je wil tekenen aan te geven. Geogebra tekent dan direct een cirkel, die je nog kunt verplaatsen naar de juiste plek.

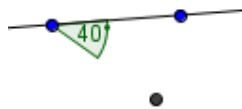


Cirkelboog met middelpunt door twee punten: Klik eerst het middelpunt aan van de cirkel waar je cirkelboog een deel van is. Klik vervolgens de twee eindpunten aan. Geogebra tekent tegen de klok in, dus om de boog in het plaatje hiernaast te krijgen, klik je eerst het middelpunt aan, vervolgens het onderste punt en daarna het bovenste punt.

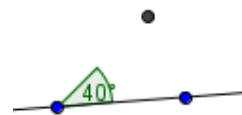


Hoek met gegeven grootte: Klik eerst op een punt op de lijn die je al hebt en dan op het punt waar je wil dat de twee lijnen elkaar snijden. Dan verschijnt een scherm waarin je de grootte van de hoek kunt invullen. **Vergeet het $^{\circ}$ - teken niet.** Geef ook aan hoe je de hoek getekend wil hebben: met de klok mee (“wijzerzin”) of tegen de klok in (“tegenwijzerzin”).

Wijzerzin



Tegenwijzerzin



Hoek: Klik twee lijnen aan, of een punt op één lijn, het snijpunt van de twee lijnen en een punt op de andere lijn, om de hoek tussen twee lijnen te tekenen.

Geogebra werkt heel precies met hoeken. Als je de punten in de plaatjes hieronder in de volgorde A, B, C aanklikt, of de lijnen in de volgorde l, m, dan tekent Geogebra de hoek in het linker plaatje. Klik je de punten aan in de volgorde C, B, A, of de lijnen in de volgorde m, l, dan krijg je de hoek in het rechter plaatje.

